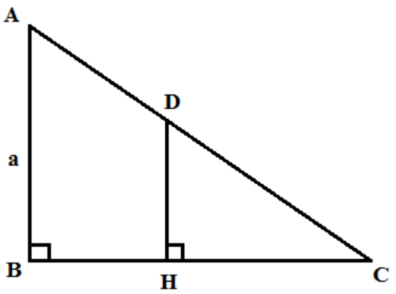
Очный тур олимпиады «Паруса надежды» 2018год.

Вариант 2.

1) Строим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = a, BC = 2a$, где a – произвольный отрезок. Тогда гипотенуза этого треугольника по т.Пифагора равна: $AC = a\sqrt{5}$. На гипотенузе AC отложим отрезок CD равный $\sqrt{5}$, а из точки D опустим перпендикуляр DH. Из подобия треугольников DHC и ABC, получаем, что $\frac{CH}{BC} = \frac{DC}{AC}$. Отсюда $CH = 2$.



2) Полагая, что $t = 2x + 3, x = \frac{t-3}{2}$, получим:

$$\begin{cases} f(t-1) + 2\varphi(2t+1) = \frac{t-5}{2} \\ f(x-1) + \varphi(2x+1) = 2x \end{cases}$$

Заменяя переменную во втором уравнении x на t, имеем систему:

$$\begin{cases} f(t-1) + 2\varphi(2t+1) = \frac{t-5}{2} \\ f(t-1) + \varphi(2t+1) = 2t \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, имеем $\varphi(2t+1) = \frac{t-5}{2} - 2t = \frac{-3t-5}{2}$. Следовательно $f(t-1) = 2t + \frac{3t+5}{2} = \frac{7t+5}{2}$. Поэтому, если $2t + 1 = x$, то $t = \frac{x-1}{2}$ и тогда $\varphi(x) = \frac{-3x+3-10}{4} = -\frac{3x+7}{4}$. Аналогично, обозначая $t - 1 = x$, имеем $f(x) = \frac{7x+12}{2}$.

Ответ: $f(x) = \frac{7x+12}{2}$, $\varphi(x) = -\frac{3x+7}{4}$.

3) Обозначим $a = 2x + 3y - 2z - 3, b = 4x - y - 4z + 7, c = 6z - 2y - 6x - 1$. По ОДЗ $a, b, c > 0$ и a, b, c целые числа. Так как $a + b + c = 3$, то $a = b = c = 1$. Следовательно $6z^2 - 47z + 77 < 0$. Решая это неравенство, находим, что $\frac{7}{3} < z < 5{,}5$. Так как z – целое число, то $z = \{3,4,5\}$. При $z = 3$ находим, что $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 4x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 2$.

Значит $(2,2,3)$ есть решение.

При $z = 4$ получим $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x - y = 10 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 2$.

При $z = 5$ получим $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 4x - y = 14 \end{cases} \Rightarrow y = 2, x = 4$, значит $(4,2,5)$ – решение.

Ответ: $(2,2,3), (4,2,5), (3,2.4)$.

4) Неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{(x^2 - 2x - 3)((3 + 2x)^2 - (x - 2)^2)}{(x^2 - 1)^2 - 3^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 3)(x + 1)(x + 5)(3x + 1)}{(x^2 - 4)(x^2 + 2)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 3)(x + 1)(x + 5)\left(x + \frac{1}{3}\right)}{(x - 1)(x + 2)} > 0$$

Решая это неравенство методом интервалов, находим ответ: $x < -5$; $-2 < x < -1$; $-\frac{1}{3} < x < 2; x > 3$.

5) Имеем:

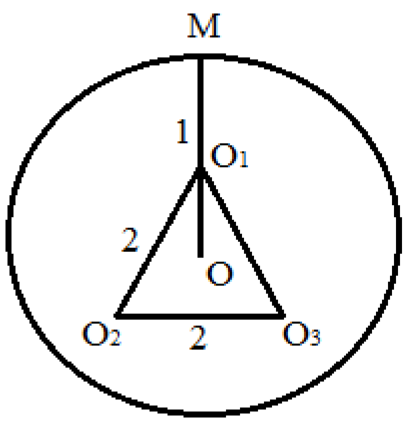
$$\frac{cosx}{\sin^2 x\,(cosx - sinx)} - 8 = \frac{\cos x - 8\sin^2 x \cos x + 8\sin^3 x}{\sin^2 x\,(\cos x - \sin x)}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x\,(\cos x - \sin x)}\left(\frac{\cos x\,(1 - 8\sin^2 x)}{\sin^3 x} + 8\right)\sin^3 x$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x - \sin x}\left[\frac{1}{\sin^3 x}\cos x\,(1 - 8\sin^2 x) + 8\right].$$

При $0 < x < \frac{\pi}{4}$ $\sin x > 0, \cos x - \sin x > 0$, поэтому все три выражения $\cos x, \frac{1}{\sin^3 x}$, $1 - 8\sin^2 x$ убывают, поэтому наименьшее значение $\frac{\cos x}{\sin^3 x}(1 - 8\sin^2 x)$ получится при $x = \frac{\pi}{4,}$ оно равно -6, следовательно, $\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 8$, что и требовалось доказать.

6) Так как сферы касаются обоих оснований цилиндра, то высота цилиндра равна 2. Сделаем ортогональную проекцию сфер на нижнее основание цилиндра. Пусть R – радиус основания цилиндра, O – центр нижнего основания, O_1, O_2, O_3 – проекции центров сфер на нижнее основание цилиндра. Тогда проекция это окружность радиуса R, в которой лежат три равные окружности радиуса 1; каждая из этих окружностей касается двух других окружностей и внутренним образом касается окружности цилиндра (см. рисунок). Ясно, что треугольник $O_1O_2O_3$ правильный со стороной 2, точка O –



центр этого треугольника. Тогда находим, что

$O_1O = \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. А тогда $R = OM = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$. Отсюда объем цилиндра равен

$V = 2\pi\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$. Ответ: $2\pi\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$.

7) Имеем: $1111122222 = \frac{10^{10}-1}{9} + \frac{10^5-1}{9} = \frac{(10^5-1)(10^5+1)}{9} + \frac{10^5-1}{9} = \frac{10^5-1}{9} * (10^5+2) = \frac{10^5-1}{3} * \frac{10^5+2}{3}$. Поэтому получим: $x^2 - x = \frac{10^5+2}{3} * \frac{10^5-1}{3}$.
Покажем, что корни этого уравнения будут числа $\frac{10^5+2}{3}$ и $\frac{1-10^5}{3}$. Для этого подставим эти числа в исходное уравнение:
$$\left(\frac{10^5+2}{3}\right)^2 - \frac{10^5+2}{3} = \left(\frac{10^5+2}{3}\right)\left(\frac{10^5+2}{3} - 1\right)$$
$$= \left(\frac{10^5+2}{3}\right)\left(\frac{10^5-1}{3}\right),$$
т.е. равно первой части.
Аналогично, подставляя число $\frac{1-10^5}{3}$ в исходное уравнение, получим:
$$\left(\frac{1-10^5}{3}\right)^2 - \frac{1-10^5}{3} = \left(\frac{1-10^5}{3}\right)\left(\frac{1-10^5}{3} - 1\right)$$
$$= \left(\frac{1-10^5}{3}\right)\left(-\frac{10^5-2}{3}\right) = \left(\frac{10^5+2}{3}\right)\left(\frac{10^5-1}{3}\right),$$
ч.т.д.
Ответ: $\frac{10^5+2}{3}$, $\frac{1-10^5}{3}$.

8) Уравнение имеет корни при неотрицательном дискриминанте: $\frac{D}{4} = a^2 - 4a - 3 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq a \leq -1$. По теореме Виета $S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1x_2 = 4a^2 - 2(2a^2 + 4a + 3) = -8a - 6$. При $-3 \leq a \leq -1$ получаем, что $2 \leq -8a - 6 \leq 18$, следовательно наибольшее значение суммы равно 18 и оно достигается при $a = -3$.
Ответ: $a = -3$, S=18.